Loi des évènements rares de Poisson

Lemme 1. *Soient* $z_1, \dots, z_n, z'_1, \dots, z'_n \in \mathbb{C}$ *de modules inférieurs ou égaux à 1. On a alors :*

$$\left|\prod_{i=1}^{n} z_i - \prod_{i=1}^{n} z'_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i - z'_i|$$

Démonstration.

On raisonne par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, le résultat est trivial. On suppose alors le résultat vrai au rang $n \geqslant 2$, montrons le au rang n :

$$\left|\prod_{i=1}^{n} z_i - \prod_{i=1}^{n} z'_i\right| = \left|\left(\prod_{i=1}^{n-1} z_i - \prod_{i=1}^{n-1} z'_i\right) \times z_n + \prod_{i=1}^{n} y_i(z_n - y_n)\right| \leqslant \left|\prod_{i=1}^{n-1} z_i - \prod_{i=1}^{n-1} z'_i\right| \times \underbrace{|z_n|}_{\leqslant 1} + \underbrace{\left|\prod_{i=1}^{n} |y_i|\right|}_{\leqslant 1} \times |z_n - y_n|$$

$$\leqslant \left|\prod_{i=1}^{n-1} z_i - \prod_{i=1}^{n-1} z'_i\right| + |z_n - y_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i - z'_i|$$

On a donc montré le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. □

Théorème 2. *Soit* $(X_{n,j})_{n\in\mathbb{N}^\star, j\in[\![1,M_n]\!]}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans* $\{0,1\}$, *avec* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *une suite croissante de* $\mathbb{N}^\star$ *qui tend vers* $+\infty$. *On pose* $\mathbb{P}(X_{n,j} = 1) = p_{n,j}$ *et* $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} X_{n,j}$. *On suppose de plus que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} = \lambda > 0$$

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *converge en loi vers la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration.

On pose dans la suite $m_n = \max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j}$ et $s_n = \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}$. Calculons la fonction caractéristique de S_n :

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \varphi_{X_{n,j}}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \mathbb{E}\left[e^{itX_{n,j}}\right] = \prod_{j=1}^{M_n} \left((1 - p_{n,j}) + e^{it}p_{n,j}\right) = \prod_{j=1}^{M_n} \left(1 + p_{n,j}(e^{it} - 1)\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $j \in [\![1, M_n]\!]$, on considère des variables aléatoires indépendantes $P_{n,j}$ suivant les lois de Poisson $\mathcal{P}(p_{n,j})$. Posons $S'_n = \sum_{j=1}^{M_n} P_{n,j}$. On a alors :

$$\varphi_{S'_n}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \varphi_{P_{n,j}}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} e^{p_{n,j}(e^{it}-1)} = e^{s_n(e^{it}-1)}$$

On obtient alors, grâce au Lemme 1 :

$$\left|\varphi_{S_n}(t) - \varphi_{S'_n}(t)\right| = \left|\prod_{j=1}^{M_n} \left(1 + p_{n,j}(e^{it} - 1)\right) - \prod_{j=1}^{M_n} e^{p_{n,j}(e^{it}-1)}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{M_n} \left|1 + p_{n,j}(e^{it} - 1) - e^{p_{n,j}(e^{it}-1)}\right|$$

Soit alors $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie pour $z \in \mathbb{C}$ par $g(z) = |e^z - 1 - z|$. On a :

$$g(z) = \left|\sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right| = \left|\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!}\right| = |z|^2 \left|\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right| \leqslant \frac{|z|^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^2}{2} e^{|z|}$$

En utilisant les inégalités $|p_{n,j}(e^{it} - 1)| \leqslant 2p_{n,j} \leqslant 2$, on obtient :

$$\left|\varphi_{S_n}(t) - \varphi_{S'_n}(t)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{M_n} g(p_{n,j}(e^{it} - 1)) \leqslant \sum_{j=1}^{M_n} \frac{(2p_{n,j})^2}{2} e^2 = 2e^2 \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \leqslant 2e^2 s_n m_n$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, s_n tend vers λ et m_n tend vers 0, donc $\left|\varphi_{S_n}(t) - \varphi_{S'_n}(t)\right|$ tend vers 0. Alors :

$$\left|\varphi_{S_n}(t) - e^{\lambda(e^{it}-1)}\right| \leqslant \left|\varphi_{S_n}(t) - \varphi_{S'_n}(t)\right| + \left|\varphi_{S'_n}(t) - e^{\lambda(e^{it}-1)}\right| = \left|\varphi_{S_n}(t) - \varphi_{S'_n}(t)\right| + \left|e^{s_n(e^{it}-1)} - e^{\lambda(e^{it}-1)}\right|$$

Quand n tend vers $+\infty$, s_n tend vers λ, donc $\left|\varphi_{S_n}(t) - e^{\lambda(e^{it}-1)}\right|$ tend vers 0. La fonction caractéristique de S_n converge alors simplement vers la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre λ, donc, par le théorème de Lévy, S_n converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. $\square$

Références

[Ouv09] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités : Tome 2.* Cassini, 2009